链表　DLX　并查集

July 16, 2018, riteme

单向链表

最简单的链表：只存储每个元素的数据和指向下一个元素 (后继) 的指针。

```
struct Node {
    int data;
    Node *nxt;
};
```

单向链表

最简单的链表：只存储每个元素的数据和指向下一个元素 (后继) 的指针。

```
struct Node {
    int data;
    Node *nxt;
};
```

如果 nxt 为 NULL，表示链表的最后一个元素。

单向链表

最简单的链表：只存储每个元素的数据和指向下一个元素 (后继) 的指针。

```
struct Node {
    int data;
    Node *nxt;
};
```

如果 `nxt` 为 `NULL`，表示链表的最后一个元素。

支持 $\Theta(1)$ 在某个元素后面插入、删除，以及两个链表的拼接。

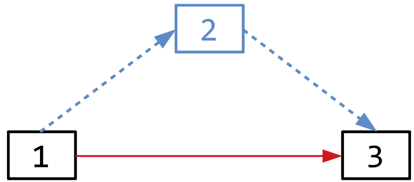
单向链表

最简单的链表：只存储每个元素的数据和指向下一个元素 (后继) 的指针。

```
struct Node {
    int data;
    Node *nxt;
};
```

如果 `nxt` 为 `NULL`，表示链表的最后一个元素。

支持 $\Theta(1)$ 在某个元素后面插入、删除，以及两个链表的拼接。



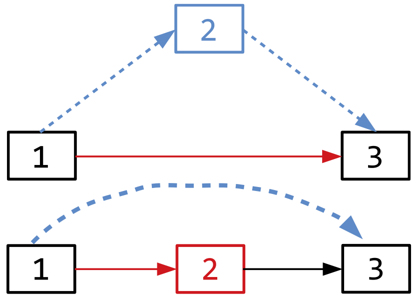
单向链表

最简单的链表：只存储每个元素的数据和指向下一个元素 (后继) 的指针。

```
struct Node {
    int data;
    Node *nxt;
};
```

如果 `nxt` 为 `NULL`， 表示链表的最后一个元素。

支持 $\Theta(1)$ 在某个元素后面插入、删除， 以及两个链表的拼接。



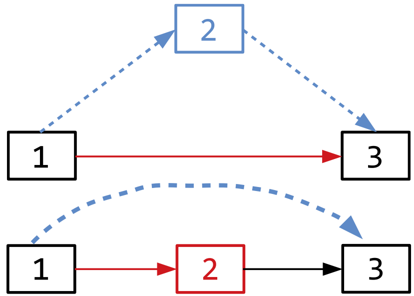
单向链表

最简单的链表：只存储每个元素的数据和指向下一个元素 (后继) 的指针。

```
struct Node {
    int data;
    Node *nxt;
};
```

如果 `nxt` 为 `NULL`，表示链表的最后一个元素。

支持 $\Theta(1)$ 在某个元素后面插入、删除，以及两个链表的拼接。



注意处理初始时链表为空的情况。

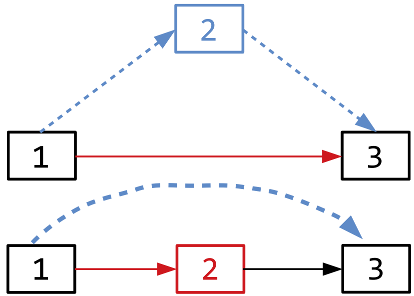
单向链表

最简单的链表：只存储每个元素的数据和指向下一个元素 (后继) 的指针。

```
struct Node {
    int data;
    Node *nxt;
};
```

如果 `nxt` 为 `NULL`，表示链表的最后一个元素。

支持 $\Theta(1)$ 在某个元素后面插入、删除，以及两个链表的拼接。



注意处理初始时链表为空的情况。

如果没有辅助数组，链表无法快速访问内部元素。

双向链表

添加一个前驱指针 pre 使得可以在链表中双向移动。

双向链表

添加一个前驱指针 pre 使得可以在链表中双向移动。

初赛填空题： 补全双向链表的插入与删除操作:

双向链表

添加一个前驱指针 pre 使得可以在链表中双向移动。

初赛填空题：补全双向链表的插入与删除操作：

```
struct Node {
    Node(int v) : data(v), pre(NULL), nxt(NULL) {}
    int data;
    Node *pre, *nxt;
};

void insert(Node *x, int v) {  // 将 v 插入到节点 x 后方
    assert(x);  // 保证 x != NULL
    Node *y = new Node(v);
    // FIXME!
}

void remove(Node *x) {
    // FIXME!
}
```

双向链表

添加一个前驱指针 pre 使得可以在链表中双向移动。

初赛填空题：补全双向链表的插入与删除操作：

```
struct Node {
    Node(int v) : data(v), pre(NULL), nxt(NULL) {}
    int data;
    Node *pre, *nxt;
};

void insert(Node *x, int v) {  // 将 v 插入到节点 x 后方
    assert(x);  // 保证 x != NULL
    Node *y = new Node(v);
    y->pre = x; y->nxt = x->nxt;
    if (x->nxt) x->nxt->pre = y;
    x->nxt = y;
}

void remove(Node *x) {
    if (x->pre) x->pre->nxt = x->nxt;
    if (x->nxt) x->nxt->pre = x->pre;
    // x->pre = x->nxt = NULL;
}
```

双向链表

添加一个前驱指针 pre 使得可以在链表中双向移动。

初赛填空题：补全双向链表的插入与删除操作：

```
struct Node {
    Node(int v) : data(v), pre(NULL), nxt(NULL) {}
    int data;
    Node *pre, *nxt;
};

void insert(Node *x, int v) {  // 将 v 插入到节点 x 后方
    assert(x);  // 保证 x != NULL
    Node *y = new Node(v);
    y->pre = x; y->nxt = x->nxt;
    if (x->nxt) x->nxt->pre = y;
    x->nxt = y;
}

void remove(Node *x) {
    if (x->pre) x->pre->nxt = x->nxt;
    if (x->nxt) x->nxt->pre = x->pre;
    // x->pre = x->nxt = NULL;
}
```

谨防段错误！

循环链表

链表首尾相接变成一个环，构成了循环链表。循环列表支持从链表中任意一个元素开始遍历整个链表。

循环链表

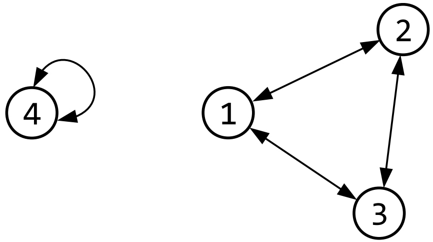
链表首尾相接变成一个环，构成了循环链表。循环列表支持从链表中任意一个元素开始遍历整个链表。

如果链表中只有一个元素，构成一个自环。

循环链表

链表首尾相接变成一个环，构成了循环链表。循环列表支持从链表中任意一个元素开始遍历整个链表。

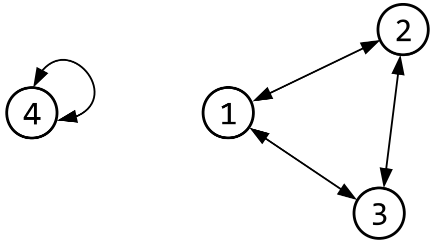
如果链表中只有一个元素，构成一个自环。



循环链表

链表首尾相接变成一个环，构成了循环链表。循环列表支持从链表中任意一个元素开始遍历整个链表。

如果链表中只有一个元素，构成一个自环。



双向链表中每个元素任何时候都有前驱和后继，因而代码上可以省去几个 `if` 判断。

循环列表：模拟约瑟夫问题

【洛谷 P1996】：n 个人排成一圈，从第一个人开始报数 $1, 2, 3, \ldots,$ 数到 m 的人就出列，然后重新从 1 开始报数。依次输出出列的人的编号。$n, m \leqslant 100$。

循环列表：模拟约瑟夫问题

【洛谷 P1996】：n 个人排成一圈，从第一个人开始报数 $1, 2, 3, \ldots,$ 数到 m 的人就出列，然后重新从 1 开始报数。依次输出出列的人的编号。$n, m \leqslant 100$。

数据范围这么小简直就是在~~侮辱智商~~哈哈哈。

循环列表：模拟约瑟夫问题

【洛谷 P1996】：n 个人排成一圈，从第一个人开始报数 $1, 2, 3, \ldots,$ 数到 m 的人就出列，然后重新从 1 开始报数。依次输出出列的人的编号。$n, m \leqslant 100$。

建一个循环链表，然后按照题意模拟就 OK 了。

Dancing Links: 精确匹配

DLX (Dancing LinkS) 是高德纳爷爷 (Donald Knuth) 为了解决**精确匹配问题**而设计的一种*数据结构*。

Dancing Links: 精确匹配

DLX (Dancing LinkS) 是高德纳爷爷 (Donald Knuth) 为了解决**精确匹配问题**而设计的一种*数据结构*。

精确匹配问题：在一个 $n \times m$ 的 0/1 矩阵中（n 行 m 列），选出一些行，使得每一列上**有且仅有**一个 1。输出所有方案。

Dancing Links: 精确匹配

DLX (Dancing LinkS) 是高德纳爷爷 (Donald Knuth) 为了解决**精确匹配问题**而设计的一种*数据结构*。

精确匹配问题：在一个 $n \times m$ 的 0/1 矩阵中（n 行 m 列），选出一些行，使得每一列上有且仅有一个 1。输出所有方案。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6\times 7 \text{ matrix}}$$

Dancing Links: 精确匹配

DLX (Dancing LinkS) 是高德纳爷爷 (Donald Knuth) 为了解决**精确匹配问题**而设计的一种*数据结构*。

精确匹配问题：在一个 $n \times m$ 的 0/1 矩阵中（n 行 m 列），选出一些行，使得每一列上**有且仅有**一个 1。输出所有方案。

$$\begin{bmatrix} \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{1} & \color{blue}{0} \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} \\ \color{blue}{0} & \color{red}{1} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{blue}{0} & \color{red}{1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6\times 7 \text{ matrix}}$$

暴力枚举算法：枚举 2^n 种选取行的情形，利用链表加速 $\Theta(n+m)$ 时间检查是否合法。

Dancing Links: 精确匹配

DLX (Dancing LinkS) 是高德纳爷爷 (Donald Knuth) 为了解决**精确匹配问题**而设计的一种*数据结构*。

精确匹配问题：在一个 $n \times m$ 的 0/1 矩阵中（n 行 m 列），选出一些行，使得每一列上**有且仅有**一个 1。输出所有方案。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{6\times 7 \text{ matrix}}$$

暴力枚举算法：枚举 2^n 种选取行的情形，利用链表加速 $\Theta(n+m)$ 时间检查是否合法。

DLX: 优化搜索 + 剪枝的过程。

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程:

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程:

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程:

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程:

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~钦定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程：

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~钦定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程:

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~钦定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程:

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~钦定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程：

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~锁定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程：

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~钦定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程:

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~钦定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

删去被染色的行和列后，得到更小的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

暴力搜索

直接暴力搜索的一种流程：

1. 如果当前矩阵没有列，则要求满足。
2. 任意选取一列，如果这一列上没有 1，则无解。
3. 否则依次遍历这一列上所有有 1 的行，其中必须有一行被选中。~~铁定~~某一行被选中，删去所有被覆盖的列和不能再选择的行，得到一个更小的矩阵，递归下去处理。

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

删去被染色的行和列后，得到更小的矩阵：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

继续搜索发现只要选择第二和第三行即可（原第四和第五行）。最后得到一组解：选择 1、4、5 行。

十字链表

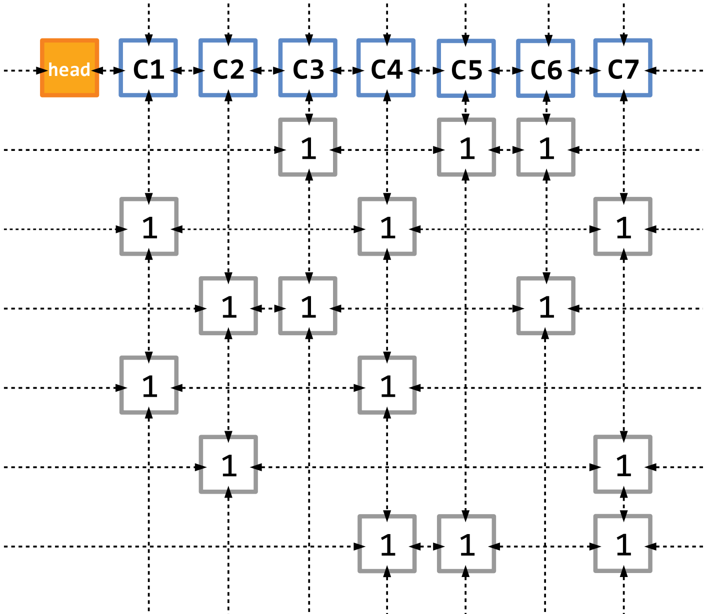
能有解的矩阵一般 1 都比较稀疏，而暴力搜索花费了大量时间在遍历 0 上面。

十字链表

能有解的矩阵一般 1 都比较稀疏，而暴力搜索花费了大量时间在遍历 0 上面。
为了避免访问无用的 0，考虑将所有 1 单独建立一个节点，构造**十字链表**：

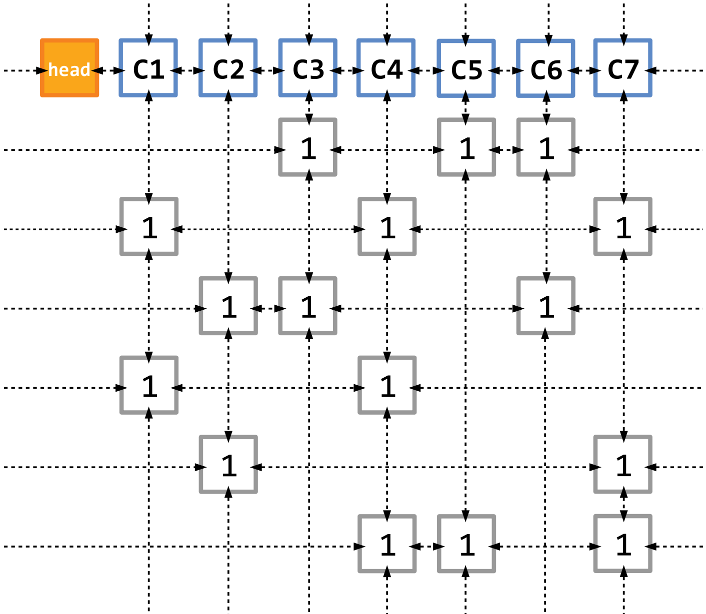
十字链表

能有解的矩阵一般 1 都比较稀疏，而暴力搜索花费了大量时间在遍历 0 上面。
为了避免访问无用的 0，考虑将所有 1 单独建立一个节点，构造**十字链表**：



十字链表

能有解的矩阵一般 1 都比较稀疏，而暴力搜索花费了大量时间在遍历 0 上面。
为了避免访问无用的 0，考虑将所有 1 单独建立一个节点，构造**十字链表**：



每个节点同时处在横排和竖排两个*循环双向链表*中。最上面一排 C1 至 Cm (C7) 是辅助节点，用于快速寻找未被覆盖的竖排。head 节点也是用于方便遍历所有现存的列的辅助节点。

暴力搜索还有一个比较费时间的地方：每次递归前都要保存现有的状态，确保能够回溯。DLX 在这方面有突出优势。回忆一下循环链表的删除操作：

暴力搜索还有一个比较费时间的地方：每次递归前都要保存现有的状态，确保能够回溯。DLX 在这方面有突出优势。回忆一下循环链表的删除操作：

```
void remove(Node *x) {
    x->pre->nxt = x->nxt;
    x->nxt->pre = x->pre;
    // x->pre = x->nxt = NULL;
}
```

暴力搜索还有一个比较费时间的地方：每次递归前都要保存现有的状态，确保能够回溯。DLX 在这方面有突出优势。回忆一下循环链表的删除操作：

```
void remove(Node *x) {
    x->pre->nxt = x->nxt;
    x->nxt->pre = x->pre;
    // x->pre = x->nxt = NULL;
}
```

如果保留 `x->pre` 和 `x->nxt` 的值不变，那么可以通过下面的操作将 x *还原*到链表中：

```
void restore(Node *x) {
    x->pre->nxt = x->nxt->pre = x;
}
```

暴力搜索还有一个比较费时间的地方：每次递归前都要保存现有的状态，确保能够回溯。DLX 在这方面有突出优势。回忆一下循环链表的删除操作：

```
void remove(Node *x) {
    x->pre->nxt = x->nxt;
    x->nxt->pre = x->pre;
    // x->pre = x->nxt = NULL;
}
```

如果保留 `x->pre` 和 `x->nxt` 的值不变，那么可以通过下面的操作将 x *还原*到链表中：

```
void restore(Node *x) {
    x->pre->nxt = x->nxt->pre = x;
}
```

所以我们利用一个*栈*，依次将被删除的节点压入栈中。回溯时就一直弹栈，恢复节点。

暴力搜索还有一个比较费时间的地方：每次递归前都要保存现有的状态，确保能够回溯。DLX 在这方面有突出优势。回忆一下循环链表的删除操作：

```
void remove(Node *x) {
    x->pre->nxt = x->nxt;
    x->nxt->pre = x->pre;
    // x->pre = x->nxt = NULL;
}
```

如果保留 `x->pre` 和 `x->nxt` 的值不变，那么可以通过下面的操作将 `x` *还原*到链表中：

```
void restore(Node *x) {
    x->pre->nxt = x->nxt->pre = x;
}
```

所以我们利用一个*栈*，依次将被删除的节点压入栈中。回溯时就一直弹栈，恢复节点。因此 DLX 是**可撤销数据结构**。

一点~~小~~优化

实际上，如果按上面的方式实现，速度还不是很理想。

一点~~小~~优化

实际上，如果按上面的方式实现，速度还不是很理想。

搜索相比于暴力枚举 2^n 种情况的方法，可以在递归的过程中剪去不必要的搜索。而 DLX 简化了搜索过程中不必要的步骤。

一点~~小~~优化

实际上，如果按上面的方式实现，速度还不是很理想。

搜索相比于暴力枚举 2^n 种情况的方法，可以在递归的过程中剪去不必要的搜索。而 DLX 简化了搜索过程中不必要的步骤。

为了能够尽可能避免回溯，每次选取含有 1 的个数最少的一列。

一点~~小~~优化

实际上，如果按上面的方式实现，速度还不是很理想。

搜索相比于暴力枚举 2^n 种情况的方法，可以在递归的过程中剪去不必要的搜索。而 DLX 简化了搜索过程中不必要的步骤。

为了能够尽可能避免回溯，每次选取含有 1 的个数最少的一列。

可以看到，如果矩阵中存在没有 1 的列，那么矩阵不合法，上述优化能够直接检测到。

一点~~小~~优化

实际上，如果按上面的方式实现，速度还不是很理想。

搜索相比于暴力枚举 2^n 种情况的方法，可以在递归的过程中剪去不必要的搜索。而 DLX 简化了搜索过程中不必要的步骤。

为了能够尽可能避免回溯，每次选取含有 1 的个数最少的一列。

可以看到，如果矩阵中存在没有 1 的列，那么矩阵不合法，上述优化能够直接检测到。

对于绝大部分情况，这个算法可以比较轻松地跑过 $n, m \approx 500$ 的数据。

精确覆盖：平面密铺

例题：用 13 种俄罗斯方块密铺 $n \times m$ 的方格纸，计算方案总数。$n, m \leqslant 15$。

精确覆盖：平面密铺

例题：用 13 种俄罗斯方块密铺 $n \times m$ 的方格纸，计算方案总数。$n, m \leqslant 15$。

精确覆盖：平面密铺

例题：用 13 种俄罗斯方块密铺 $n \times m$ 的方格纸，计算方案总数。$n, m \leqslant 15$。

构建模型：考虑精确覆盖问题：每一列有且仅有一个 1。

精确覆盖：平面密铺

例题：用 13 种俄罗斯方块密铺 $n \times m$ 的方格纸，计算方案总数。$n, m \leqslant 15$。

构建模型：考虑精确覆盖问题：每一列有且仅有一个 1。

而密铺问题中：每一个格子能且只能被俄罗斯方块覆盖一次。因此尝试构造矩阵，方格纸上每一个格子对应一列。

精确覆盖：平面密铺

例题：用 13 种俄罗斯方块密铺 $n \times m$ 的方格纸，计算方案总数。$n, m \leqslant 15$。

构建模型： 考虑精确覆盖问题：每一列有且仅有一个 1。

而密铺问题中：每一个格子能且只能被俄罗斯方块覆盖一次。因此尝试构造矩阵，方格纸上每一个格子对应一列。

对于每种方块，首先可能有多种旋转的方式，其次在网格上不同的位置会占据不同的格子，对应在矩阵中某一行的相应的列上填 1。

精确覆盖：平面密铺

例题：用 13 种俄罗斯方块密铺 $n \times m$ 的方格纸，计算方案总数。$n, m \leqslant 15$。

构建模型： 考虑精确覆盖问题：每一列有且仅有一个 1。

而密铺问题中：每一个格子能且只能被俄罗斯方块覆盖一次。因此尝试构造矩阵，方格纸上每一个格子对应一列。

对于每种方块，首先可能有多种旋转的方式，其次在网格上不同的位置会占据不同的格子，对应在矩阵中某一行的相应的列上填 1。

枚举所有方块摆放的可能性，构造矩阵跑精确匹配即可。

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独：

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

→

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	3	6	8	2	1	7	5
6	7	5	4	9	1	2	8	3
1	5	4	2	3	7	8	9	6
3	6	9	8	4	5	7	2	1
2	8	7	1	6	9	5	3	4
5	2	1	9	7	4	3	6	8
4	3	8	5	2	6	9	1	7
7	9	6	3	1	8	4	5	2

号称 “世界最难数独”

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	3	6	8	2	1	7	5
6	7	5	4	9	1	2	8	3
1	5	4	2	3	7	8	9	6
3	6	9	8	4	5	7	2	1
2	8	7	1	6	9	5	3	4
5	2	1	9	7	4	3	6	8
4	3	8	5	2	6	9	1	7
7	9	6	3	1	8	4	5	2

号称 “世界最难数独”

数独的规则:

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	**6**					
	7			**9**		**2**		
	5				**7**			
				4	**5**	**7**		
			1				**3**	
		1					**6**	**8**
		8	**5**				**1**	
	9					**4**		

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	**3**	**6**	8	2	1	7	5
6	**7**	5	4	**9**	1	**2**	8	3
1	**5**	4	2	3	**7**	8	9	6
3	6	9	8	**4**	**5**	**7**	2	1
2	8	7	**1**	6	9	5	**3**	4
5	2	**1**	9	7	4	3	**6**	**8**
4	3	**8**	**5**	2	6	9	**1**	7
7	**9**	6	3	1	8	**4**	5	2

号称 “世界最难数独”

数独的规则:

1. 每一行中 1..9 各出现一次。

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	3	6	8	2	1	7	5
6	7	5	4	9	1	2	8	3
1	5	4	2	3	7	8	9	6
3	6	9	8	4	5	7	2	1
2	8	7	1	6	9	5	3	4
5	2	1	9	7	4	3	6	8
4	3	8	5	2	6	9	1	7
7	9	6	3	1	8	4	5	2

号称“世界最难数独”

数独的规则:

1. 每一行中 1..9 各出现一次。
2. 每一列中 1..9 各出现一次。

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	**3**	**6**	8	2	1	7	5
6	**7**	5	4	**9**	1	**2**	8	3
1	**5**	4	2	3	**7**	8	9	6
3	6	9	8	**4**	**5**	**7**	2	1
2	8	7	**1**	6	9	5	**3**	4
5	2	**1**	9	7	4	3	**6**	**8**
4	3	**8**	**5**	2	6	9	**1**	7
7	**9**	6	3	1	8	**4**	5	2

号称 “世界最难数独”

数独的规则:

1. 每一行中 1..9 各出现一次。
2. 每一列中 1..9 各出现一次。
3. 每一个九宫格中 1..9 各出现一次。

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

→

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	**3**	**6**	8	2	1	7	5
6	**7**	5	4	**9**	1	**2**	8	3
1	**5**	4	2	3	**7**	8	9	6
3	6	9	8	**4**	**5**	**7**	2	1
2	8	7	**1**	6	9	5	**3**	4
5	2	**1**	9	7	4	3	**6**	**8**
4	3	**8**	**5**	2	6	9	**1**	7
7	**9**	6	3	1	8	**4**	5	2

号称 “世界最难数独”

数独的规则:

1. 每一行中 1..9 各出现一次。
2. 每一列中 1..9 各出现一次。
3. 每一个九宫格中 1..9 各出现一次。
4. 每个格子上只能填一个 1..9 中的数字。

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	3	6	8	2	1	7	5
6	7	5	4	9	1	2	8	3
1	5	4	2	3	7	8	9	6
3	6	9	8	4	5	7	2	1
2	8	7	1	6	9	5	3	4
5	2	1	9	7	4	3	6	8
4	3	8	5	2	6	9	1	7
7	9	6	3	1	8	4	5	2

号称 “世界最难数独”

构建模型：注意到上面的每一条规则都对应着 $9 \times 9 = 81$ 个要求。例如第二行中出现 3 、第三行第四列上要有数字。总共 324 个要求，对应矩阵中 324 列。

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

$\rightarrow$

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	3	6	8	2	1	7	5
6	7	5	4	9	1	2	8	3
1	5	4	2	3	7	8	9	6
3	6	9	8	4	5	7	2	1
2	8	7	1	6	9	5	3	4
5	2	1	9	7	4	3	6	8
4	3	8	5	2	6	9	1	7
7	9	6	3	1	8	4	5	2

号称“世界最难数独”

构建模型：注意到上面的每一条规则都对应着 $9 \times 9 = 81$ 个要求。例如第二行中出现 3、第三行第四列上要有数字。总共 324 个要求，对应矩阵中 324 列。

对于每一种填数字的情况，即在第 x 行、第 y 列上填数字 c，至多 $9^3 = 729$ 种。注意有一些格子已经提前给出。每一种情况会满足一些要求，根据这一点来填充矩阵。

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独:

8								
		3	6					
	7			9		2		
	5				7			
				4	5	7		
			1				3	
		1					6	8
		8	5				1	
	9					4		

→

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	**3**	**6**	8	2	1	7	5
6	**7**	5	4	**9**	1	**2**	8	3
1	**5**	4	2	3	**7**	8	9	6
3	6	9	8	**4**	**5**	**7**	2	1
2	8	7	**1**	6	9	5	**3**	4
5	2	**1**	9	7	4	3	**6**	**8**
4	3	**8**	**5**	2	6	9	**1**	7
7	**9**	6	3	1	8	**4**	5	2

号称“世界最难数独”

构建模型：注意到上面的每一条规则都对应着 $9 \times 9 = 81$ 个要求。例如第二行中出现 3 、第三行第四列上要有数字。总共 324 个要求，对应矩阵中 324 列。

对于每一种填数字的情况，即在第 x 行、第 y 列上填数字 c，至多 $9^3 = 729$ 种。注意有一些格子已经提前给出。每一种情况会满足一些要求，根据这一点来填充矩阵。

练手题：【洛谷 P1784】、【POJ 3076】

精确覆盖：Soduku

精确匹配的另外一个经典应用就是求解数独：

8								
		3	**6**					
	7			**9**		**2**		
	5				**7**			
				4	**5**	**7**		
			1				**3**	
		1					**6**	**8**
		8	**5**				**1**	
	9					**4**		

8	1	2	7	5	3	6	4	9
9	4	**3**	**6**	8	2	1	7	5
6	**7**	5	4	**9**	1	**2**	8	3
1	**5**	4	2	3	**7**	8	9	6
3	6	9	8	**4**	**5**	**7**	2	1
2	8	7	**1**	6	9	5	**3**	4
5	2	**1**	9	7	4	3	**6**	**8**
4	3	**8**	**5**	2	6	9	**1**	7
7	**9**	6	3	1	8	**4**	5	2

号称“世界最难数独”

构建模型：注意到上面的每一条规则都对应着 $9\times 9=81$ 个要求。例如第二行中出现 3 、第三行第四列上要有数字。总共 324 个要求，对应矩阵中 324 列。

对于每一种填数字的情况，即在第 x 行、第 y 列上填数字 c，至多 $9^3=729$ 种。注意有一些格子已经提前给出。每一种情况会满足一些要求，根据这一点来填充矩阵。

练手题：【洛谷 P1784】、【POJ 3076】

问题：可以使用精确匹配解决 n 皇后问题吗?

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。具体而言，并查集支持以下操作：

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作:

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合:

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

$$\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}\ \boxed{5}\ \boxed{6}$$

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

$\boxed{1\quad 2\quad 3}\ \boxed{4\quad 5}\ \boxed{6}$

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

$\boxed{\color{red}{1}\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}\ \boxed{\color{red}{6}}$

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5} \ \boxed{6}$$

这样我们的并查集就只需要支持两种操作：

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

$$\boxed{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}\ \boxed{6}$$

这样我们的并查集就只需要支持两种操作：

1. `link`：将两个集合合并，按集合内的代表元素作为参数传入。

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

$$\boxed{1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5} \ \boxed{6}$$

这样我们的并查集就只需要支持两种操作：

1. `link`: 将两个集合合并，按集合内的代表元素作为参数传入。
2. `find`: 查找一个元素所在集合的代表元素。

并查集

并查集原名**不相交集合数据结构**。并查集是它支持的操作的名称的简写：合并、查询。

具体而言，并查集支持以下操作：

1. 合并两个集合。
2. 查询两个元素是否在同一集合内。

初始时，共有 n 个元素，分属不同的集合。

为了方便，我们在每个集合中选出一个代表元素来表示这个集合：

$$\boxed{1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5}\ \boxed{6}$$

这样我们的并查集就只需要支持两种操作：

1. `link`: 将两个集合合并，按集合内的代表元素作为参数传入。
2. `find`: 查找一个元素所在集合的代表元素。

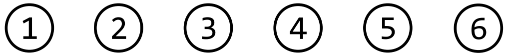
实际上合并两个集合是从这两个集合中各选出一个元素，执行两次 `find` 找出代表元素，然后执行 `link` 操作来实现的。

并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：

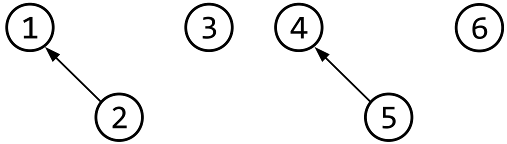
并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：



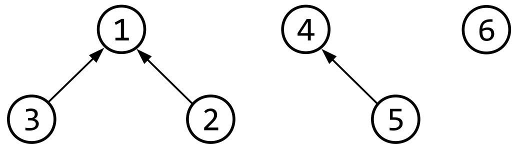
并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：



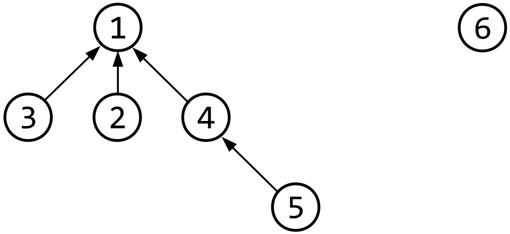
并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：



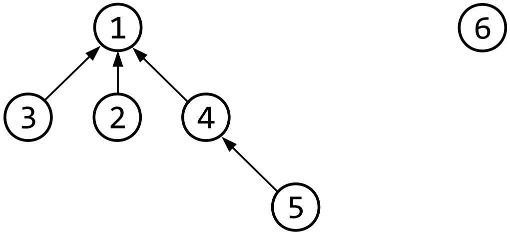
并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：



并查集：基本结构

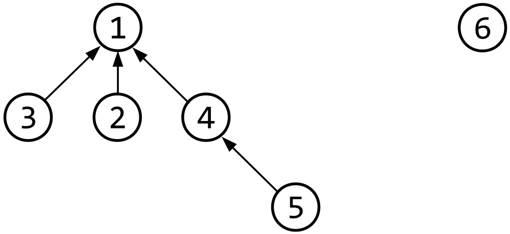
使用树可以很方便地表示并查集：



类似于一堆的单向链表，为每个元素记录一个父亲指针 `father` 就可以实现。如果 `father` 为 `NULL`，说明该元素为树根，也就是这个集合的代表元素。

并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：

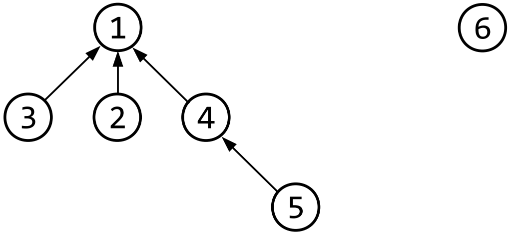


类似于一堆的单向链表，为每个元素记录一个父亲指针 `father` 就可以实现。如果 `father` 为 NULL，说明该元素为树根，也就是这个集合的代表元素。

```
function link(int x, int y):
    // 保证 x 和 y 均为树根
    assert father[x] == NULL
    assert father[y] == NULL
    if x == y: return
    father[x] = y
function find(int x):
    while father[x] != NULL:
        x = father[x]
    return x
```

并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：



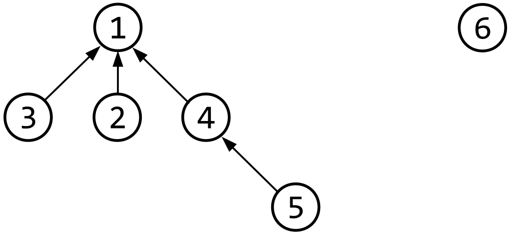
类似于一堆的单向链表，为每个元素记录一个父亲指针 `father` 就可以实现。如果 `father` 为 NULL，说明该元素为树根，也就是这个集合的代表元素。

```
function link(int x, int y):
    // 保证 x 和 y 均为树根
    assert father[x] == NULL
    assert father[y] == NULL
    if x == y: return
    father[x] = y
function find(int x):
    while father[x] != NULL:
        x = father[x]
    return x
```

So easy?

并查集：基本结构

使用树可以很方便地表示并查集：



类似于一堆的单向链表，为每个元素记录一个父亲指针 `father` 就可以实现。如果 `father` 为 NULL，说明该元素为树根，也就是这个集合的代表元素。

```
function link(int x, int y):
    // 保证 x 和 y 均为树根
    assert father[x] == NULL
    assert father[y] == NULL
    if x == y: return
    father[x] = y
function find(int x):
    while father[x] != NULL:
        x = father[x]
    return x
```

So ~~*naïve*~~!

并查集：按秩合并

如果这样实现，时间复杂度是 $O(n)$ 的。因为我们的 `link` 操作可以将 n 个元素连成长长的一条链，然后对链底执行 `find`，会花费 $O(n)$ 的时间。

并查集：按秩合并

如果这样实现，时间复杂度是 $O(n)$ 的。因为我们的 `link` 操作可以将 n 个元素连成长长的一条链，然后对链底执行 `find`，会花费 $O(n)$ 的时间。

所以树的高度直接决定了 `find` 最坏情况下花费的时间。因此优化的重点在于降低树的高度。

并查集：按秩合并

如果这样实现，时间复杂度是 $O(n)$ 的。因为我们的 `link` 操作可以将 n 个元素连成长长的一条链，然后对链底执行 `find`，会花费 $O(n)$ 的时间。

所以树的高度直接决定了 `find` 最坏情况下花费的时间。因此优化的重点在于降低树的高度。

按秩合并：记录每棵树的高度，每次合并时，选取较高的树作为树根。

并查集：按秩合并

如果这样实现，时间复杂度是 $O(n)$ 的。因为我们的 `link` 操作可以将 n 个元素连成长长的一条链，然后对链底执行 `find`，会花费 $O(n)$ 的时间。

所以树的高度直接决定了 `find` 最坏情况下花费的时间。因此优化的重点在于降低树的高度。

按秩合并：记录每棵树的高度，每次合并时，选取较高的树作为树根。

所谓树的**高度**，又称作**秩**，就是所有点到根节点的路径上，经过的边的数量的最大值。

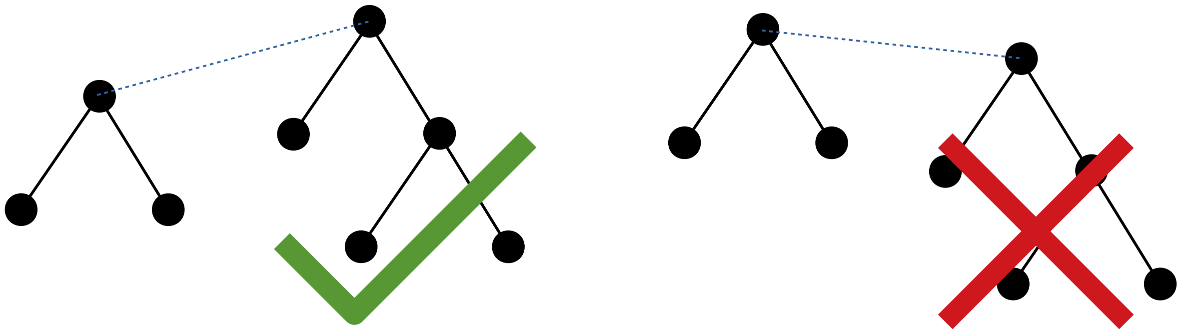
并查集：按秩合并

如果这样实现，时间复杂度是 $O(n)$ 的。因为我们的 `link` 操作可以将 n 个元素连成长长的一条链，然后对链底执行 `find`，会花费 $O(n)$ 的时间。

所以树的高度直接决定了 `find` 最坏情况下花费的时间。因此优化的重点在于降低树的高度。

按秩合并：记录每棵树的高度，每次合并时，选取较高的树作为树根。

所谓树的**高度**，又称作**秩**，就是所有点到根节点的路径上，经过的边的数量的最大值。



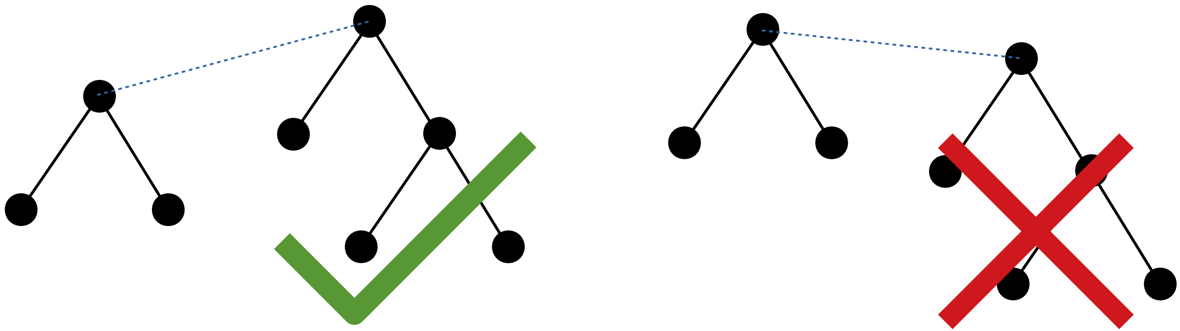
并查集：按秩合并

如果这样实现，时间复杂度是 $O(n)$ 的。因为我们的 `link` 操作可以将 n 个元素连成长长的一条链，然后对链底执行 `find`，会花费 $O(n)$ 的时间。

所以树的高度直接决定了 `find` 最坏情况下花费的时间。因此优化的重点在于降低树的高度。

按秩合并：记录每棵树的高度，每次合并时，选取较高的树作为树根。

所谓树的**高度**，又称作**秩**，就是所有点到根节点的路径上，经过的边的数量的最大值。



可以为每个元素再记录一个 `rank` 值，表示树的秩。

按秩合并：实现

注意到我们只需要树根的 `rank` 值，而树根的 `father` 值为空，其余元素的 `father` 值均大于 0。为了充分利用空间，树根的 `father` 可以存储 `-rank`。

按秩合并：实现

注意到我们只需要树根的 `rank` 值，而树根的 `father` 值为空，其余元素的 `father` 值均大于 0。为了充分利用空间，树根的 `father` 可以存储 `-rank`。

```
function link(int x, int y):
    if x == y: return
    if father[x] > father[y]: swap(x, y)  // -father[x] < -father[y]
    if father[x] == father[y]: father[x]--  // 只有两棵树高相同时，合并后的树高才会增加
    father[y] = x
function find(int x):
    while father[x] > 0:  // father[x] > 0 意味着不是树根
        x = father[x]
    return x
```

按秩合并：时间复杂度

这种策略看上去非常有道理，实际上也非常实用。可以证明，采用按秩合并策略，树的高度为 $O(\log n)$。意味着 `find` 操作的时间复杂度为 $O(\log n)$。

按秩合并：时间复杂度

这种策略看上去非常有道理，实际上也非常实用。可以证明，采用按秩合并策略，树的高度为 $O(\log n)$。意味着 `find` 操作的时间复杂度为 $O(\log n)$。

Review: $2^{\log n} = n$

按秩合并：时间复杂度

这种策略看上去非常有道理，实际上也非常实用。可以证明，采用按秩合并策略，树的高度为 $O(\log n)$。意味着 `find` 操作的时间复杂度为 $O(\log n)$。

Review: $2^{\log n} = n$

定理　执行按秩合并策略，高度为 h 的树中至少有 2^h 个元素（节点）。

按秩合并：时间复杂度

这种策略看上去非常有道理，实际上也非常实用。可以证明，采用按秩合并策略，树的高度为 $O(\log n)$。意味着 `find` 操作的时间复杂度为 $O(\log n)$。

Review: $2^{\log n} = n$

定理　执行按秩合并策略，高度为 h 的树中至少有 2^h 个元素（节点）。

证明　运用数学归纳法：如果 $h = 0$，则只有一个节点，树中有 $2^0 = 1$ 个节点。现在假设对于 $0..h-1$，该结论均成立，现在尝试证明树高为 h 时也成立。

按秩合并：时间复杂度

这种策略看上去非常有道理，实际上也非常实用。可以证明，采用按秩合并策略，树的高度为 $O(\log n)$。意味着 `find` 操作的时间复杂度为 $O(\log n)$。

Review: $2^{\log n} = n$

定理　执行按秩合并策略，高度为 h 的树中至少有 2^h 个元素（节点）。

证明　运用数学归纳法：如果 $h = 0$，则只有一个节点，树中有 $2^0 = 1$ 个节点。现在假设对于 $0..h-1$，该结论均成立，现在尝试证明树高为 h 时也成立。

考虑如何才能使树的高度加 1。这需要两棵秩为 $h-1$ 的树进行合并。根据归纳假设，这两棵树分别至少有 2^{h-1} 个元素，合并之后至少有 $2^{h-1} + 2^{h-1} = 2^h$ 个元素。 ∎

按秩合并：时间复杂度

这种策略看上去非常有道理，实际上也非常实用。可以证明，采用按秩合并策略，树的高度为 $O(\log n)$。意味着 `find` 操作的时间复杂度为 $O(\log n)$。

Review: $2^{\log n} = n$

定理 执行按秩合并策略，高度为 h 的树中至少有 2^h 个元素（节点）。

证明 运用数学归纳法：如果 $h = 0$，则只有一个节点，树中有 $2^0 = 1$ 个节点。现在假设对于 $0..h-1$，该结论均成立，现在尝试证明树高为 h 时也成立。

考虑如何才能使树的高度加 1。这需要两棵秩为 $h-1$ 的树进行合并。根据归纳假设，这两棵树分别至少有 2^{h-1} 个元素，合并之后至少有 $2^{h-1} + 2^{h-1} = 2^h$ 个元素。 ■

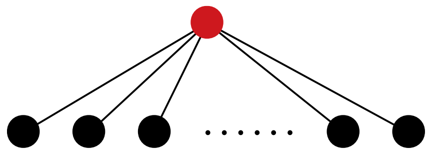
取 $H \geqslant \log n$，则 $2^H \geqslant n$，所以树高不超过 H，即树高为 $O(\log n)$ 级别的。

路径压缩

另外一个相当给力也相当直观的策略就是**路径压缩**了。这个策略针对 `find` 操作下手。由于我们只有合并操作，也就是说同一集合中的元素只增不减，所以一棵树的形态其实可以随意更改而没有任何副作用。当然最理想的情况自然是这样：

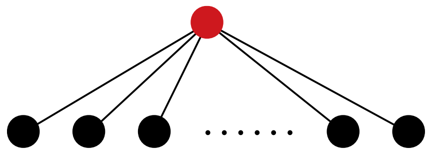
路径压缩

另外一个相当给力也相当直观的策略就是**路径压缩**了。这个策略针对 `find` 操作下手。由于我们只有合并操作，也就是说同一集合中的元素只增不减，所以一棵树的形态其实可以随意更改而没有任何副作用。当然最理想的情况自然是这样：



路径压缩

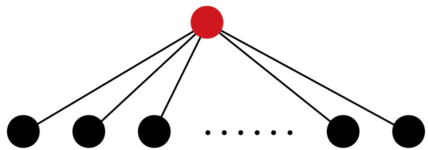
另外一个相当给力也相当直观的策略就是**路径压缩**了。这个策略针对 `find` 操作下手。由于我们只有合并操作，也就是说同一集合中的元素只增不减，所以一棵树的形态其实可以随意更改而没有任何副作用。当然最理想的情况自然是这样：



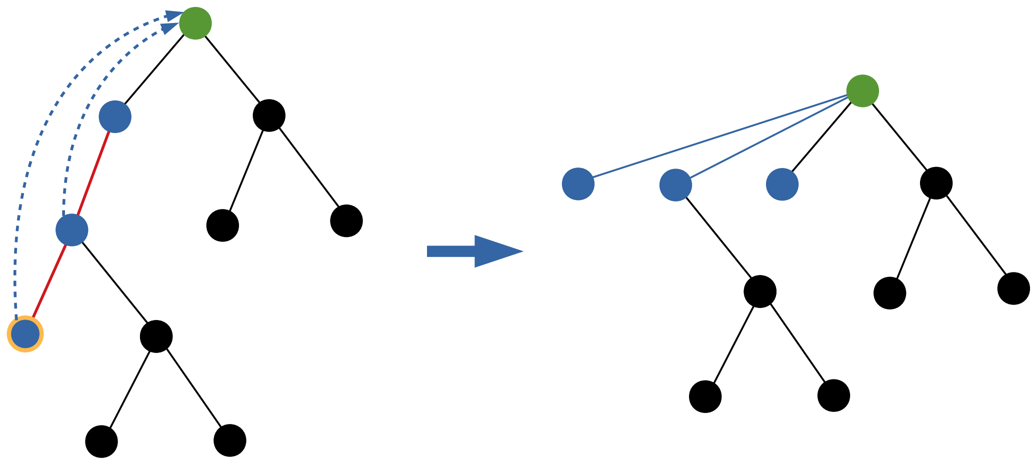
但如果每次都变成这样就和暴力无异了。路径压缩是一种偷懒的做法：合并的时候什么都不做，而在 `find` 的时候将所有遍历到的元素的 `father` 全部改为根节点。

路径压缩

另外一个相当给力也相当直观的策略就是**路径压缩**了。这个策略针对 `find` 操作下手。由于我们只有合并操作，也就是说同一集合中的元素只增不减，所以一棵树的形态其实可以随意更改而没有任何副作用。当然最理想的情况自然是这样：



但如果每次都变成这样就和暴力无异了。路径压缩是一种偷懒的做法：合并的时候什么都不做，而在 `find` 的时候将所有遍历到的元素的 `father` 全部改为根节点。



路径压缩：实现

代码真的相当简单：

路径压缩：实现

代码真的相当简单:

```
int find(int x) {
    return father[x] ? father[x] = find(father[x]) : x;
}
```

路径压缩：时间复杂度

先摆一个事实：目前 98% 的 OI 代码里面的并查集，都只用了路径压缩优化……

路径压缩：时间复杂度

先摆一个事实：目前 98% 的 OI 代码里面的并查集，都只用了路径压缩优化……

因为大部分数据是随机的，只需要一个路径压缩，并查集速度就很快了，平均下来 `find` 操作接近 $O(1)$……

路径压缩：时间复杂度

先摆一个事实：目前 98% 的 OI 代码里面的并查集，都只用了路径压缩优化……

因为大部分数据是随机的，只需要一个路径压缩，并查集速度就很快了，平均下来 `find` 操作接近 $O(1)$……

结论：不出意外，你只写个路径优化就 OK 了。~~并查集只有两行代码~~。

路径压缩：时间复杂度

先摆一个事实：目前 98% 的 OI 代码里面的并查集，都只用了路径压缩优化……

因为大部分数据是随机的，只需要一个路径压缩，并查集速度就很快了，平均下来 `find` 操作接近 $O(1)$……

结论：不出意外，你只写个路径优化就 OK 了。~~并查集只有两行代码~~。

实际上，只使用路径压缩的*均摊*时间复杂度为 $O(\log n)$。

路径压缩：时间复杂度

证明 考虑将树上的边进行分类：记边为 $e: u \to v$，即 $\text{father}[u] = v$，如果 $\text{size}[u] \leqslant \frac{1}{2}\text{size}[v]$，则称 e 为轻边。从 v 走到 u，子树大小减半。否则称为重边。

路径压缩：时间复杂度

证明　考虑将树上的边进行分类：记边为 $e: u \to v$，即 $\mathrm{father}[u] = v$，如果 $\mathrm{size}[u] \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{size}[v]$，则称 e 为轻边。从 v 走到 u，子树大小减半。否则称为重边。
从根节点一直向下走，最多走 $\lceil \log n \rceil$ 条轻边，因为每走一次子树大小就会减半，减到小于等于 1 就没法走了。

路径压缩：时间复杂度

证明　考虑将树上的边进行分类：记边为 $e : u \to v$，即 $\text{father}[u] = v$，如果 $\text{size}[u] \leqslant \frac{1}{2}\text{size}[v]$，则称 e 为轻边。从 v 走到 u，子树大小减半。否则称为重边。

从根节点一直向下走，最多走 $\lceil \log n \rceil$ 条轻边，因为每走一次子树大小就会减半，减到小于等于 1 就没法走了。

每次 `find` 将路径上的边 $e : u \to v$ 改接到根节点 r 下面去，即变成 $u \to r$。那么子树 v 中将删去子树 u。如果 e 是重边，那么每删去一次 $\text{size}[v]$ 就会减半。对于 v 而言，它最多进行 $\lceil \log n \rceil$ 次这样的操作。

路径压缩：时间复杂度

证明 考虑将树上的边进行分类：记边为 $e: u \to v$，即 $\text{father}[u] = v$，如果 $\text{size}[u] \leqslant \frac{1}{2}\text{size}[v]$，则称 e 为轻边。从 v 走到 u，子树大小减半。否则称为重边。

从根节点一直向下走，最多走 $\lceil \log n \rceil$ 条轻边，因为每走一次子树大小就会减半，减到小于等于 1 就没法走了。

每次 `find` 将路径上的边 $e: u \to v$ 改接到根节点 r 下面去，即变成 $u \to r$。那么子树 v 中将删去子树 u。如果 e 是重边，那么每删去一次 $\text{size}[v]$ 就会减半。对于 v 而言，它最多进行 $\lceil \log n \rceil$ 次这样的操作。

现在来综合一下，每次 `find` 操作，要么改接轻边，要么改接重边。根据轻边的性质，每次 `find` 至多改接 $O(\log n)$ 条轻边。根据重边的性质，每个元素（节点）处只会进行 $O(\log n)$ 次改接。

路径压缩：时间复杂度

证明 考虑将树上的边进行分类：记边为 $e : u \to v$，即 $\mathrm{father}[u] = v$，如果 $\mathrm{size}[u] \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{size}[v]$，则称 e 为轻边。从 v 走到 u，子树大小减半。否则称为重边。
从根节点一直向下走，最多走 $\lceil \log n \rceil$ 条轻边，因为每走一次子树大小就会减半，减到小于等于 1 就没法走了。
每次 `find` 将路径上的边 $e : u \to v$ 改接到根节点 r 下面去，即变成 $u \to r$。那么子树 v 中将删去子树 u。如果 e 是重边，那么每删去一次 $\mathrm{size}[v]$ 就会减半。对于 v 而言，它最多进行 $\lceil \log n \rceil$ 次这样的操作。
现在来综合一下，每次 `find` 操作，要么改接轻边，要么改接重边。根据轻边的性质，每次 `find` 至多改接 $O(\log n)$ 条轻边。根据重边的性质，每个元素（节点）处只会进行 $O(\log n)$ 次改接。
如果 `find` 操作的总数为 q，元素总个数为 n，则执行 q 次 `find` 操作的总时间复杂度为 $O((n + q) \log n)$。假设 $q \geqslant n$，将总时间平均到每次 `find` 操作上，于是每次 `find` 操作相当于只花费了 $O(\log n)$ 的时间。

路径压缩：时间复杂度

当然，正如前面所说的，路径压缩后的并查集几乎单次操作是 $O(1)$ 的，那是因为出题人太良心没卡你们，~~因为出题人总是太懒因为卡了也没什么效果~~。

路径压缩：时间复杂度

当然，正如前面所说的，路径压缩后的并查集几乎单次操作是 $O(1)$ 的，那是因为出题人太良心没卡你们，~~因为出题人总是太懒因为卡了也没什么效果~~。
如何卡只写了路径压缩的并查集呢？

路径压缩：时间复杂度

当然，正如前面所说的，路径压缩后的并查集几乎单次操作是 $O(1)$ 的，那是因为出题人太良心没卡你们，~~因为出题人总是太懒因为卡了也没什么效果~~。

如何卡只写了路径压缩的并查集呢？

使用**二项树**。

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

二项树

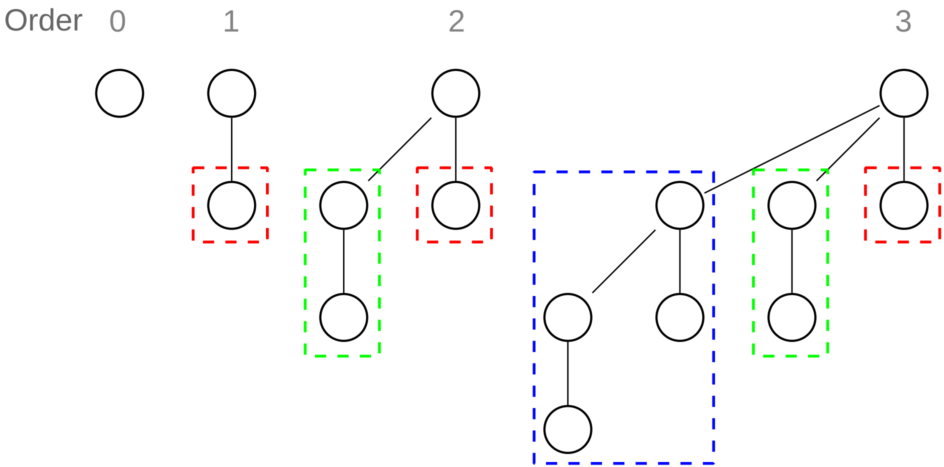
0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

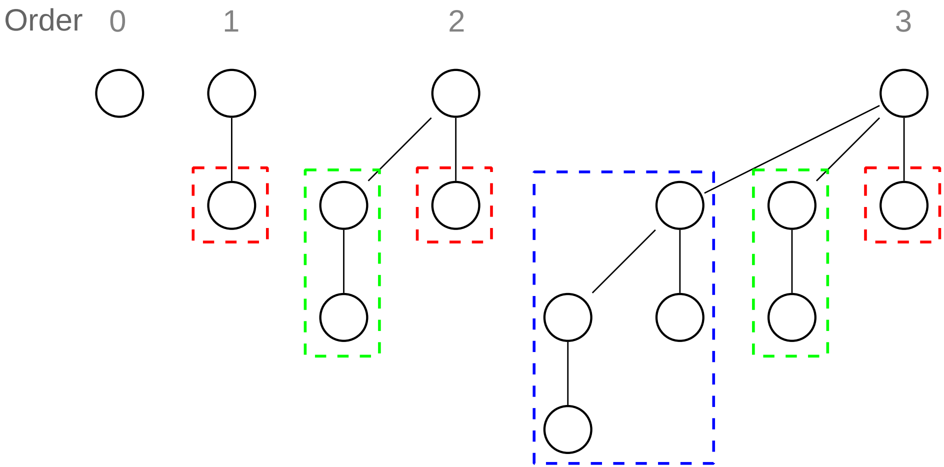
k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。



二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。

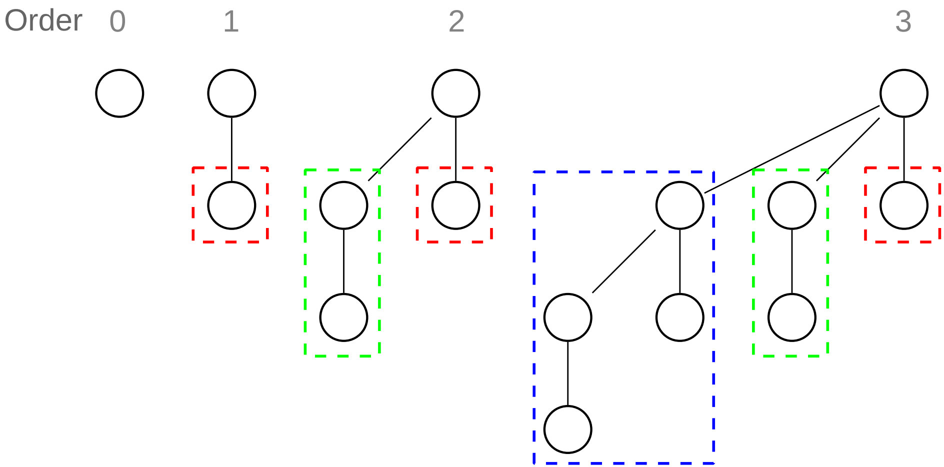


性质 1　k 阶二项树有 2^k 个节点。

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。



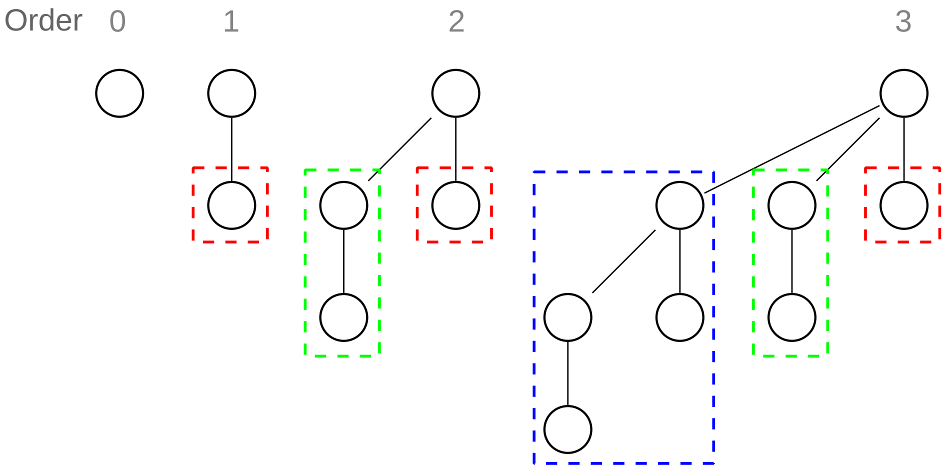
性质 1 k 阶二项树有 2^k 个节点。

证明 0 阶二项树有 $2^0=1$ 个节点，运用数学归纳法，假设对于 0 至 $n-1$ 阶均成立（$n \geqslant 1$），那么对于 n 阶二项树，总共有 $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k+1=2^n-1+1=2^n$ 个节点，归纳假设成立。

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。

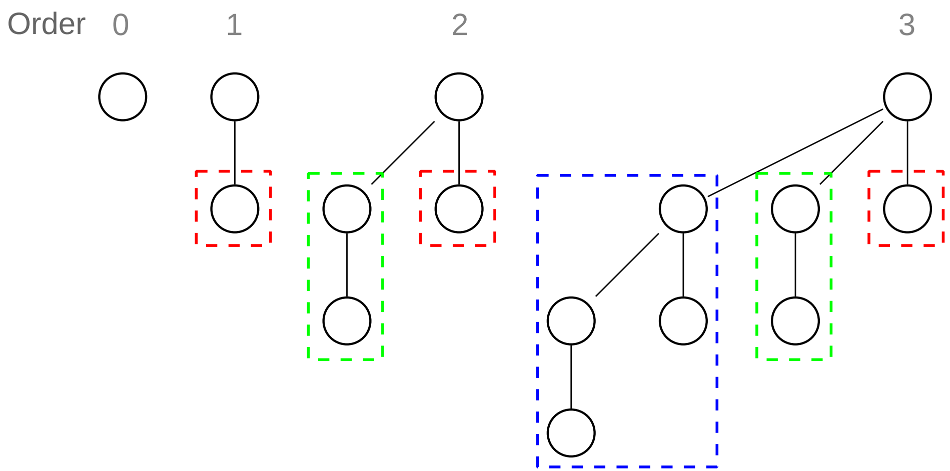


性质 2　k 阶二项树的树高为 k（这里的树高指树上节点到根的最长路径上节点个数）

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。



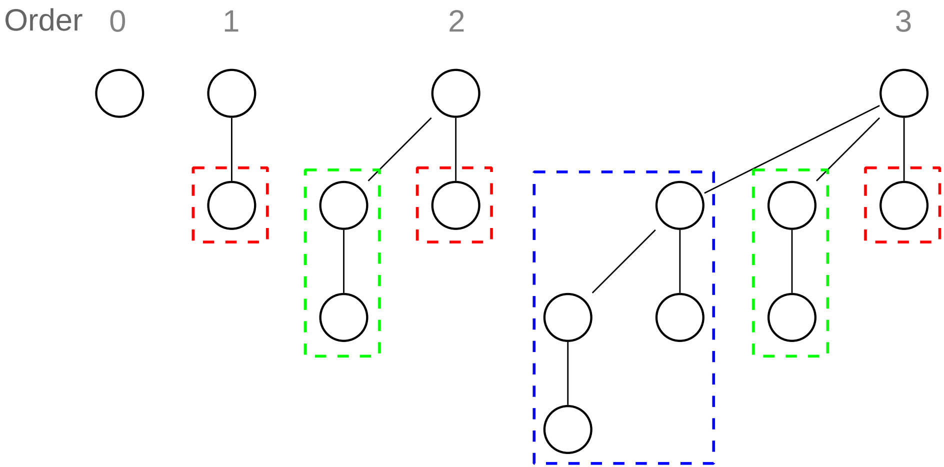
性质 2　k 阶二项树的树高为 k（这里的树高指树上节点到根的最长路径上节点个数）

证明　结论过于 trivial，~~狗眼~~观察即可。

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。

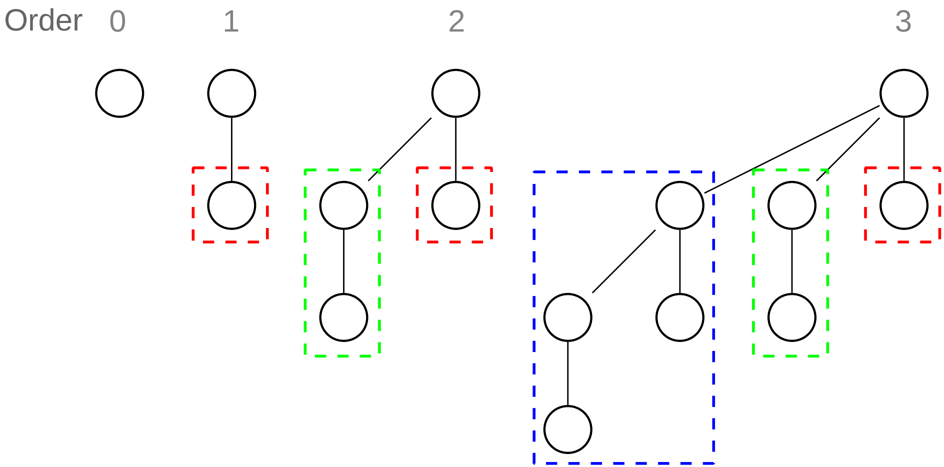


性质 3　n 阶二项树上深度为 k 的节点总数为 $\binom{n}{k}$。

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。



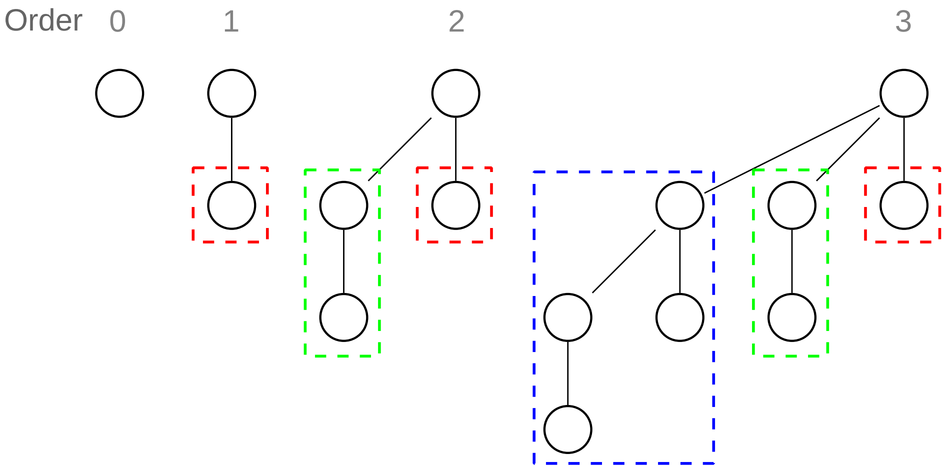
性质 3 n 阶二项树上深度为 k 的节点总数为 $\binom{n}{k}$。

这个我就不证了，现在对我们来说没什么用，只是告诉你为什么这树叫二项树。

二项树

0 阶 (order) 二项树只有一个节点。

k 阶二项树有 k 个儿子，分别为 0 至 $k-1$ 阶二项树。



性质 3 n 阶二项树上深度为 k 的节点总数为 $\binom{n}{k}$。

这个我就不证了，现在对我们来说没什么用，只是告诉你为什么这树叫**二项树**。

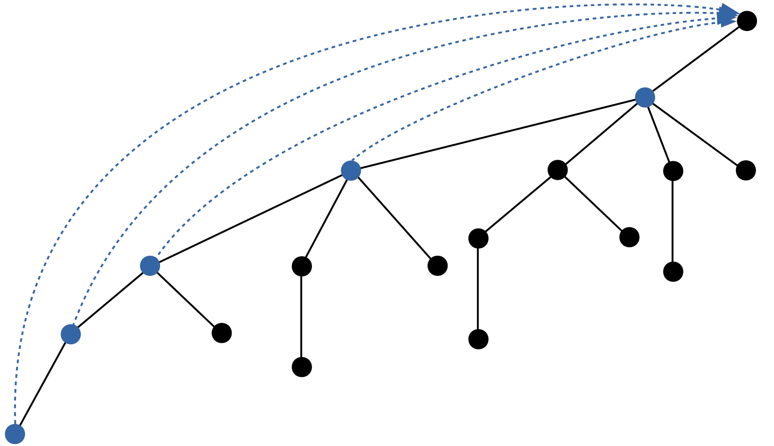
如何用二项树来卡并查集呢?

性质 4：Self-Producing

先来看看如果 `find` 二项树中最深的节点会怎么样：将一棵 4 阶二项树与一个单独的节点 `link` 起来，然后 `find` 最左下角的节点：

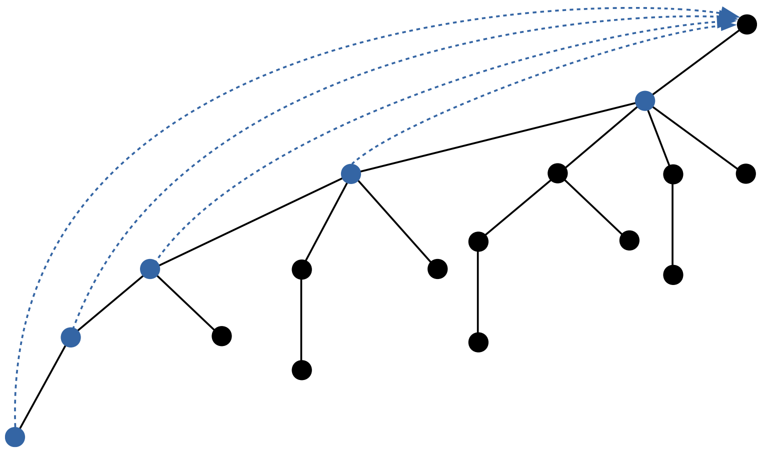
性质 4：Self-Producing

先来看看如果 `find` 二项树中最深的节点会怎么样：将一棵 4 阶二项树与一个单独的节点 `link` 起来，然后 `find` 最左下角的节点：



性质 4：Self-Producing

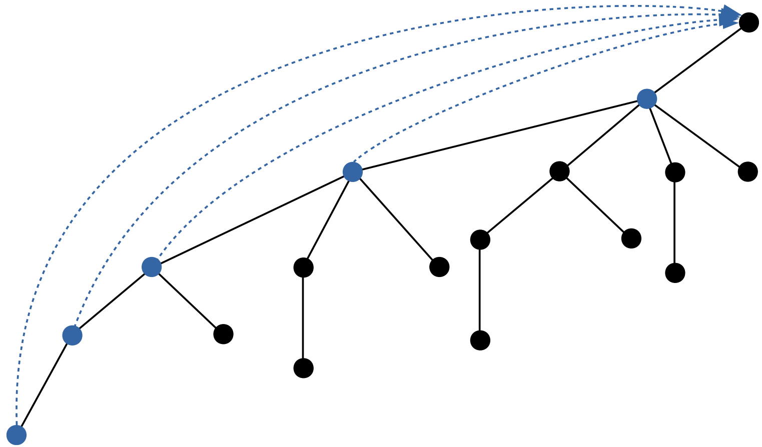
先来看看如果 `find` 二项树中最深的节点会怎么样：将一棵 4 阶二项树与一个单独的节点 `link` 起来，然后 `find` 最左下角的节点：



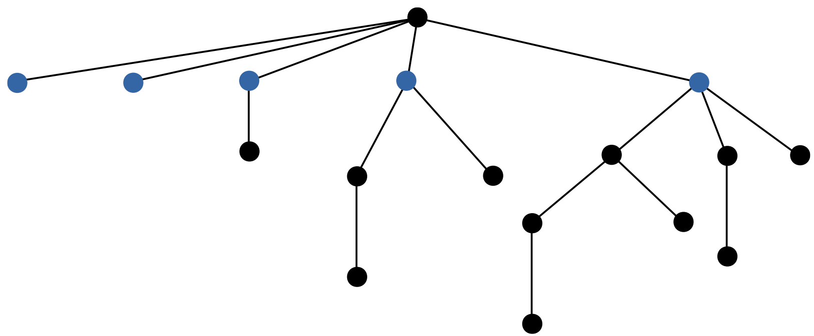
然后进入~~经典益智游戏“找不同”~~：

性质 4：Self-Producing

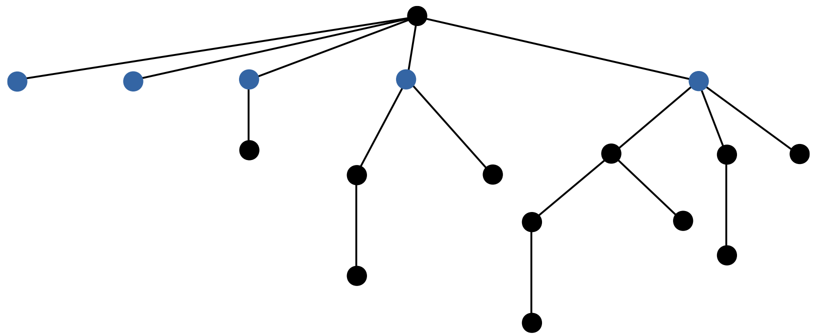
先来看看如果 `find` 二项树中最深的节点会怎么样：将一棵 4 阶二项树与一个单独的节点 `link` 起来，然后 `find` 最左下角的节点：



然后进入~~经典益智游戏 “找不同”~~：

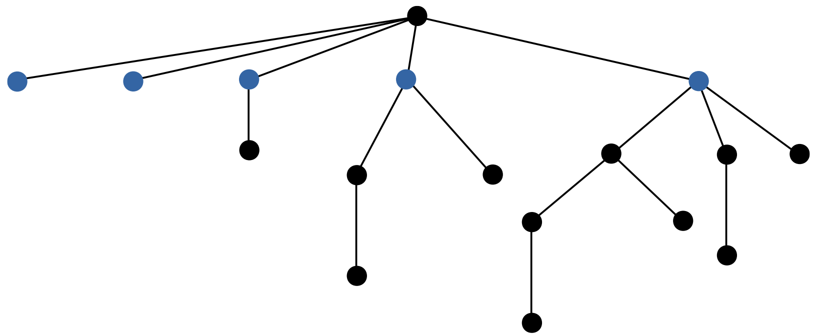


性质 4：Self-Producing



不难发现，除了最左边那个节点。剩下的部分依旧是一棵 4 阶二项树。

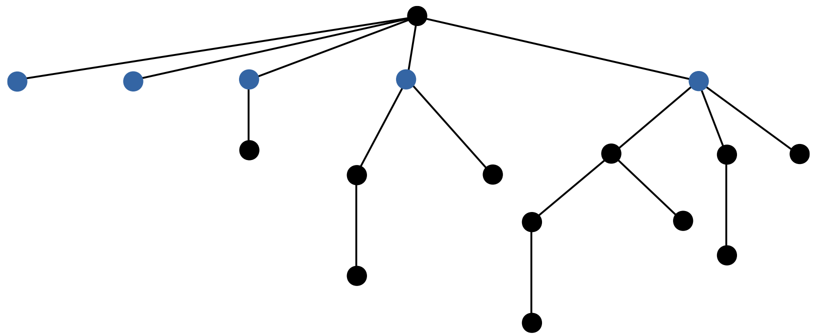
性质 4：Self-Producing



不难发现，除了最左边那个节点。剩下的部分依旧是一棵 4 阶二项树。

这是因为 k 阶二项树本身就是由两棵 $k-1$ 阶二项树合并而来，而上面的 `find` 操作正好将每一阶二项树左边拆掉了，留下右边接到根节点下面，所以结果还是一棵二项树。

性质 4：Self-Producing

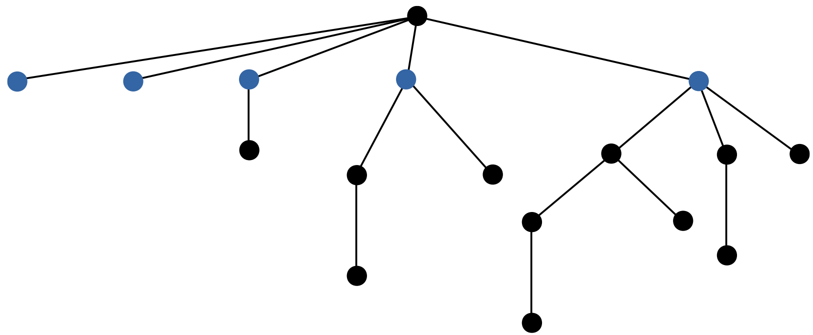


不难发现，除了最左边那个节点。剩下的部分依旧是一棵 4 阶二项树。

这是因为 k 阶二项树本身就是由两棵 $k-1$ 阶二项树合并而来，而上面的 `find` 操作正好将每一阶二项树左边拆掉了，留下右边接到根节点下面，所以结果还是一棵二项树。

令 $n=2^k$，假设 $k \geqslant 1$，那么先构建一棵 $k-1$ 阶二项树，此时还剩下 $2^{k-1}=n/2$ 个没有用到的元素，依次将它们与当前二项树合并后 `find` 最深处的节点，每次 `find` 会访问 $k=\log n$ 个节点，这样 `find` 就被卡到时间复杂度上界了。

性质 4：Self-Producing



不难发现，除了最左边那个节点。剩下的部分依旧是一棵 4 阶二项树。

这是因为 k 阶二项树本身就是由两棵 $k-1$ 阶二项树合并而来，而上面的 `find` 操作正好将每一阶二项树左边拆掉了，留下右边接到根节点下面，所以结果还是一棵二项树。

令 $n=2^k$，假设 $k\geqslant 1$，那么先构建一棵 $k-1$ 阶二项树，此时还剩下 $2^{k-1}=n/2$ 个没有用到的元素，依次将它们与当前二项树合并后 `find` 最深处的节点，每次 `find` 会访问 $k=\log n$ 个节点，这样 `find` 就被卡到时间复杂度上界了。

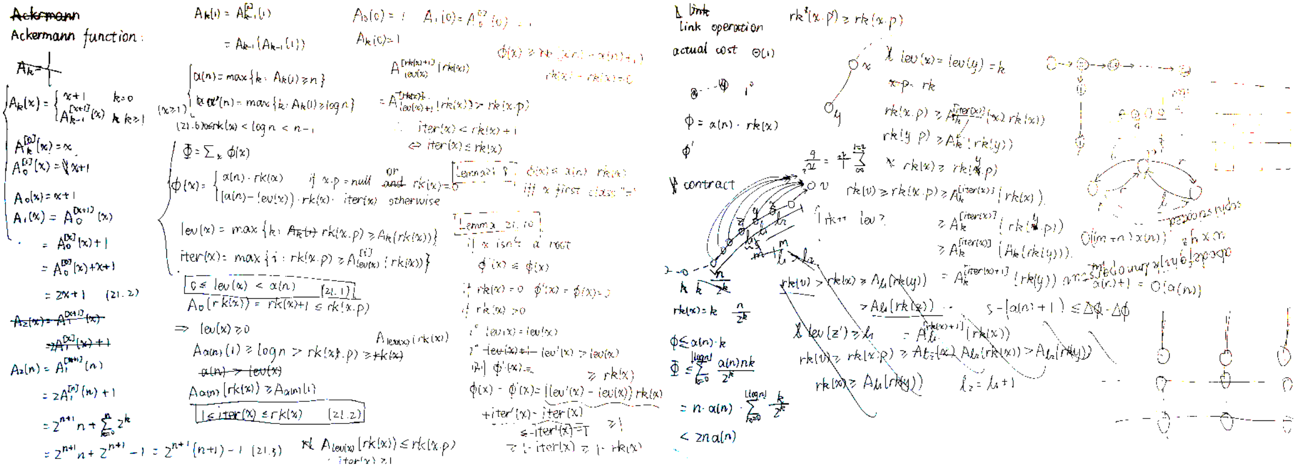
所以只使用路径压缩的并查集，`find` 的时间复杂度为 $O(\log n)$ 是一个紧的上界。

并查集：时间复杂度

最极致的优化就是路径压缩与按秩合并一块用。这样做的话，`find` 的时间复杂度是均摊 $O(\alpha(n))$。$\alpha(n)$ 是 Ackermann 反函数。当 $n \leqslant 10^{80}$ 时，$\alpha(n) \leqslant 3$。基本上可以认为是 $O(1)$ 了。

并查集：时间复杂度

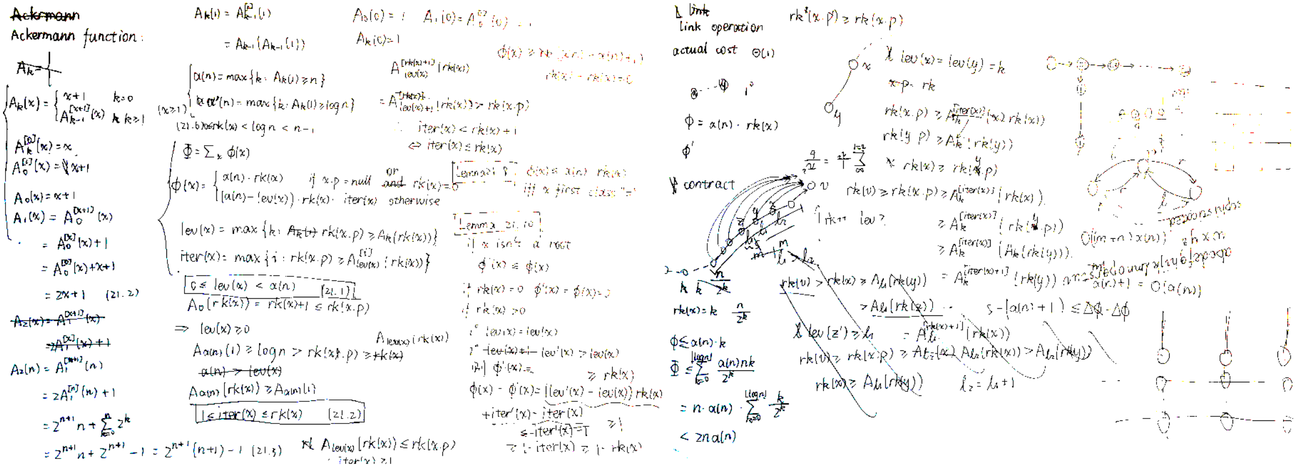
最极致的优化就是路径压缩与按秩合并一块用。这样做的话，`find` 的时间复杂度是均摊 $O(\alpha(n))$。$\alpha(n)$ 是 Ackermann 反函数。当 $n \leqslant 10^{80}$ 时，$\alpha(n) \leqslant 3$。基本上可以认为是 $O(1)$ 了。



《算法导论》21.4 节上有这个结论的证明，学有余力的同学可以阅读一下。虽然有整整 9 页文字，实际上都是比较初等的推理。这里我不会再重新打一遍到课件上了。上图是我看的时候整理的证明过程，其实只用了一张半纸 ~~QAQ~~

并查集：时间复杂度

最极致的优化就是路径压缩与按秩合并一块用。这样做的话，`find` 的时间复杂度是均摊 $O(\alpha(n))$。$\alpha(n)$ 是 Ackermann 反函数。当 $n \leqslant 10^{80}$ 时，$\alpha(n) \leqslant 3$。基本上可以认为是 $O(1)$ 了。



《算法导论》21.4 节上有这个结论的证明，学有余力的同学可以阅读一下。虽然有整整 9 页文字，实际上都是比较初等的推理。这里我不会再重新打一遍到课件上了。上图是我看的时候整理的证明过程，其实只用了一张半纸 ~~QAQ~~

~~如果要现在讲的话这节课的重点就不对了~~

例题时间

是时候讲点题目了

【NOI 2015 / LG P1955】程序自动分析

有 10^9 个变量，分别为 x_1 至 x_{10^9}，此外还有 n 个已知条件。每个已知条件会指定两个数字 i 和 j，要么是 $x_i = x_j$，要么是 $x_i \neq x_j$。需要判断这 n 个条件是否有冲突。$n \leqslant 10^5$。

【NOI 2015 / LG P1955】程序自动分析

有 10^9 个变量，分别为 x_1 至 x_{10^9}，此外还有 n 个已知条件。每个已知条件会指定两个数字 i 和 j，要么是 $x_i = x_j$，要么是 $x_i \neq x_j$。需要判断这 n 个条件是否有冲突。$n \leqslant 10^5$。

~~感动中国 2015 NOI 送分题~~

【NOI 2015 / LG P1955】程序自动分析

有 10^9 个变量，分别为 x_1 至 x_{10^9}，此外还有 n 个已知条件。每个已知条件会指定两个数字 i 和 j，要么是 $x_i = x_j$，要么是 $x_i \neq x_j$。需要判断这 n 个条件是否有冲突。$n \leqslant 10^5$。

等式具有传递性，将相等的变量放入一个集合内，用并查集进行维护。处理完所有等式之后就可以知道哪些变量是相等的了。

【NOI 2015 / LG P1955】程序自动分析

有 10^9 个变量，分别为 x_1 至 x_{10^9}，此外还有 n 个已知条件。每个已知条件会指定两个数字 i 和 j，要么是 $x_i = x_j$，要么是 $x_i \neq x_j$。需要判断这 n 个条件是否有冲突。$n \leqslant 10^5$。

等式具有传递性，将相等的变量放入一个集合内，用并查集进行维护。处理完所有等式之后就可以知道哪些变量是相等的了。

然后考虑所有的不等式是否能满足要求。如果不等式两边的变量在同一个集合内，就说明发生了冲突。

【LG P1621】集合

给定 A、B 和 P，初始时为所有满足 $A \leqslant n \leqslant B$ 的每个整数 n 单独建立一个集合。之后，如果存在两个**处在不同集合**的数字 x 和 y 之间有**不小于** P 的公共**质**因子，则将 x 和 y 所在的集合合并。问最后会剩下几个集合。$A, B \leqslant 10^5$，$2 \leqslant P \leqslant B$。

【LG P1621】集合

给定 A、B 和 P，初始时为所有满足 $A \leqslant n \leqslant B$ 的每个整数 n 单独建立一个集合。之后，如果存在两个**处在不同集合**的数字 x 和 y 之间有**不小于** P 的公共**质**因子，则将 x 和 y 所在的集合合并。问最后会剩下几个集合。$A, B \leqslant 10^5$，$2 \leqslant P \leqslant B$。

枚举 $[P, B]$ 中的所有质数 p，将 p 在范围 $[A, B]$ 内的所有倍数用并查集连起来，最后统计不同的集合个数。

【BOI 2003 / LG P1892】团伙

有 n 个强盗和 m 条信息，每条信息会表明某两个强盗之间是**朋友关系**还是**敌人关系**。

并且他们坚信：

- 朋友的朋友是朋友
- 敌人的敌人也是朋友

朋友之间会构成团伙。现在根据 m 条信息推出 n 个强盗之间会构成多少个团伙。

$n,\ m \leqslant 10^5$。

【BOI 2003 / LG P1892】团伙

有 n 个强盗和 m 条信息，每条信息会表明某两个强盗之间是**朋友关系**还是**敌人关系**。

并且他们坚信：

- 朋友的朋友是朋友
- 敌人的敌人也是朋友

朋友之间会构成团伙。现在根据 m 条信息推出 n 个强盗之间会构成多少个团伙。

$n, m \leqslant 10^5$。

如果关系是朋友，就直接连起来。

【BOI 2003 / LG P1892】团伙

有 n 个强盗和 m 条信息，每条信息会表明某两个强盗之间是**朋友关系**还是**敌人关系**。
并且他们坚信：

- 朋友的朋友是朋友
- 敌人的敌人也是朋友

朋友之间会构成团伙。现在根据 m 条信息推出 n 个强盗之间会构成多少个团伙。
$n, m \leqslant 10^5$。
如果关系是朋友，就直接连起来。
注意到一个人的所有敌人之间都是朋友关系，所以如果关系是敌人，先存起来，最后每个人的所有敌人之间都连起来即可。

【IOI 2001 / LG P2024】食物链

动物王国中有三类动物 A、B、C，构成了循环的食物链：A 吃 B，B 吃 C，C 吃 A。现在有 n 个动物（但我们不知道这些动物具体是哪一类的），和 m 句话。这 m 句话依次说出来，并且是以下两种说法之一：

1. 动物 X 和动物 Y 是同类。
2. 动物 X 吃动物 Y。

如果一句话自相矛盾或者与之前说过的**真话**有冲突，则为假话，否则为真话。需要数出 m 句话中假话的个数。$n, m \leqslant 10^5$。

【IOI 2001 / LG P2024】食物链

动物王国中有三类动物 A、B、C，构成了循环的食物链：A 吃 B，B 吃 C，C 吃 A。现在有 n 个动物（但我们不知道这些动物具体是哪一类的），和 m 句话。这 m 句话依次说出来，并且是以下两种说法之一：

1. 动物 X 和动物 Y 是同类。
2. 动物 X 吃动物 Y。

如果一句话自相矛盾或者与之前说过的**真话**有冲突，则为假话，否则为真话。需要数出 m 句话中假话的个数。$n, m \leqslant 10^5$。

由于不清楚动物的具体信息，所以尝试用假设的方法来处理。如果动物 X 捕食动物 Y，那么当 X 为 A 时 Y 就为 B，X 为 B 时 Y 就为 C，……相当于是两者不同状态之间的等价关系。因此为每个动物建 3 个点，分别表示其为 A、B 和 C 时的状态。使用并查集来处理这些等价关系，同时可以查询“X 为 a，Y 为 b”是否可以从之前的真话推出来。

【IOI 2001 / LG P2024】食物链

动物王国中有三类动物 A、B、C，构成了循环的食物链：A 吃 B，B 吃 C，C 吃 A。现在有 n 个动物（但我们不知道这些动物具体是哪一类的），和 m 句话。这 m 句话依次说出来，并且是以下两种说法之一：

1. 动物 X 和动物 Y 是同类。
2. 动物 X 吃动物 Y。

如果一句话自相矛盾或者与之前说过的**真话**有冲突，则为假话，否则为真话。需要数出 m 句话中假话的个数。$n, m \leqslant 10^5$。

由于不清楚动物的具体信息，所以尝试用假设的方法来处理。如果动物 X 捕食动物 Y，那么当 X 为 A 时 Y 就为 B，X 为 B 时 Y 就为 C，……相当于是两者不同状态之间的等价关系。因此为每个动物建 3 个点，分别表示其为 A、B 和 C 时的状态。使用并查集来处理这些等价关系，同时可以查询 “X 为 a，Y 为 b” 是否可以从之前的真话推出来。

上面是针对真话的处理方法，在这之前还需要判断一句话是不是真话。我们可以查询与这句话相矛盾的情况，在并查集中查询。如果并查集中没有查出，则为真话。

【JSOI 2008 / LG P1197】星球大战

给定一个有 n 个点 m 条边的图，每次删去一个点，并询问删去后图中有几个连通块。

$n, m \leqslant 2 \times 10^5$。

【JSOI 2008 / LG P1197】星球大战

给定一个有 n 个点 m 条边的图，每次删去一个点，并询问删去后图中有几个连通块。

$n, m \leqslant 2 \times 10^5$。

删除不好处理，倒过来变成添加，就变成并查集的拿手好戏了。

选做题 #1

【POJ 1417】True Liars

中文大意：一个岛上有 p_1 个好人和 p_2 个坏人，但是你不知道具体某一个人是好人还是坏人。你只知道**好人只讲真话，坏人只会撒谎**。为了了解哪些人是好人哪些是坏人，你一共问出了 n 个问题，第 k 个问题包含三个部分 x_k、y_k、a_k（x_k 和 y_k 是岛上居民的编号），表示你问 x_k："y_k 是不是好人？"，a_k 是 x_k 的回答，yes 或者 no。注意 x_k 可以等于 y_k，这样就变成是问："你是不是好人？"。

如果从你的询问中可以唯一推出哪些是好人，哪些是坏人，则输出所有好人的编号，一行输出一个，以 end 结尾。否则输出 no。

输入数据中包含多组数据，以 `0 0 0` 表示文件结束。

$n \leqslant 1000$，$p_1, p_2 \leqslant 300$

选做题 #2

~~没找到提交地址 TAT~~

有 q 个操作，每个操作是下面两种操作中的一种：

1. `ADD x`: 加入整数 x。
2. `EXTRACT`: 提取当前最大的整数，将其删去。

要求最后依次输出被提取出来的整数，不需要每次 `EXTRACT` 操作时就输出。（即允许离线操作）

$x, m \leqslant 10^6$

思考题

相比于链表，deque 不但可以首尾 $O(1)$ 插入删除元素，还可以支持元素随机访问，那为什么还需要链表?

扩展阅读

数据结构**跳表**：基于链表实现，维护一个有序的数列。支持插入、删除元素。

百度或 Google * 关键词 “跳表” 即可。

Wikipedia 页面：https://en.wikipedia.org/wiki/Skip_list

扩展阅读

数据结构跳表：基于链表实现，维护一个有序的数列。支持插入、删除元素。
百度或 Google * 关键词 “跳表” 即可。
Wikipedia 页面：https://en.wikipedia.org/wiki/Skip_list
*: https://google.ericfu.me/